数理解析研究所講究録
707巻 1989年 57-74

数理物理学における二，三の不等式

京大数理研　荒木　不二洋（Huzihiro ARAKI）

§1. 序

統計力学の熱力学的極限やエントロピーに関係して，いくつかの不等式が使われて来た。そのうち有名なものをまず列挙する。

Kleinの不等式　トレース有限の正作用素 ρ，σ に対し

$$\mathrm{Tr}(\rho\log\rho-\rho\log\sigma-\rho+\sigma)\geqq 0.$$

かなり古くから知られているようであるが，現在では相対エントロピーの正値性としてよく使用される。

Peierls-Bogoliubovの不等式　$A=A^*$，$B=B^*$ に対し

$$\mathrm{Tr}\,e^{A+B}/\mathrm{Tr}\,e^{A}\geqq\exp\left(\mathrm{Tr}(e^{A}B)/\mathrm{Tr}\,e^{A}\right)$$

1936年の論文[1,2]にある不等式で，次の不等式と併せて，$\mathrm{Tr}\,e^{A+B}/\mathrm{Tr}\,e^{A}$ を $\langle e^{B}\rangle_{A}$ および $\langle B\rangle_{A}$ により上下から評価するのに用いられる。ただし

$$\langle X\rangle_{A}=\mathrm{Tr}(e^{A}X)/\mathrm{Tr}\,e^{A}$$

は e^{A} を重みとする X の期待値である。（$e^{A}/\mathrm{Tr}\,e^{A}$ を密度行列とする状態。）

Golden-Thompsonの不等式　$A=A^*$, $B=B^*$ に対して

$$\mathrm{Tr}(e^A e^B) \geqq \mathrm{Tr}\, e^{A+B}$$

これは1965年の産([3], [4])である。これを導くために使われた不等式を一般化したものは次の不等式である。

Lieb-Thirringの不等式　$\rho>0$, $\sigma>0$, $m\geqq 1$ に対し

$$\mathrm{Tr}[(\rho\sigma)^m] \leqq \mathrm{Tr}(\rho^m \sigma^m)$$

Trが有限であることが保証されていない場合には

$$\mathrm{Tr}[(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2})^m] \leqq \mathrm{Tr}(\rho^{m/2}\sigma^m\rho^{m/2})$$

これは1976年の産([5])である。$\rho=e^{A/m}$, $\sigma=e^{B/m}$ とおいて，Trotterの公式を使って $m\to\infty$ の極限を計算すると，Golden-Thompsonの不等式が得られる。

状態

$$\varphi(X)=\mathrm{Tr}\,\rho X, \quad \rho\geqq 0, \quad \mathrm{Tr}\,\rho=1$$

に対して，エントロピー $S(\varphi)=S(\rho)$ を

$$S(\rho)=-\mathrm{Tr}(\rho\log\rho)$$

により定義する。$S(\rho)\geqq 0$ であり，$\rho\to S(\rho)$ は凹である：

$$\lambda S(\rho_1)+(1-\lambda)S(\rho_2)\leqq S(\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2)$$

$$\leqq \lambda S(\rho_1)+(1-\lambda)S(\rho_2)-\lambda\log\lambda-(1-\lambda)\log(1-\lambda)$$

ただし $0\leqq\lambda\leqq 1$.

ヒルベルト空間のテンソル積 $H_{12}=H_1\otimes H_2$ で記述される合成系については，H_{12} 上の作用素 ρ_{12} から H_1 あるいは H_2 の

トレースをとることにより，H_2あるいはH_1上の作用素

$$\rho_2 = \mathrm{Tr}_{H_1}\rho_{12}, \qquad \rho_1 = \mathrm{Tr}_{H_2}\rho_{12}$$

が得られる。（H_2上の任意の作用素xに対し

$$\mathrm{Tr}_{H_{12}}[\rho_{12}(1\otimes x)] = \mathrm{Tr}_{H_2}(\rho_2 x)$$

をみたすρ_2が一意に定まる。ρ_1についても同様。）

エントロピーの劣加法性　$S(\rho_{12}) \geqq S(\rho_1)+S(\rho_2)$

可換系（確率測度）については，さらに強い次の強劣加法性が成立するので，非可換系でも成立するのではないかという予想が1967年に出され，1973年に証明された。[6]

エントロピーの強劣加法性　$H_{123} = H_1\otimes H_2\otimes H_3$ について

$$S(\rho_{123}) - S(\rho_{12}) - S(\rho_{13}) + S(\rho_1) \geqq 0$$

その証明の基礎となったのは[7]

Liebの凹性　$\rho \to \mathrm{Tr}\,\exp(A+\log\rho)$　は凹。（$A=A^*$ は任意）

これと似た形だが証明が簡単な次の凸性は古くから知られていた：　$A \to \log \mathrm{Tr}\, e^A$　は凸。

エントロピーの強劣加法性は，相対エントロピーの単調性から導くこともできる。

また以上の不等式の大部分は，富田・竹崎理論を使って一般のvon Neumann環の状態へ一般化ができる。

ここではPeierls-Bogoliubov および Golden-Thompson の不等式に話を限定する。

§2 Peierls-Bogoliubov の不等式の証明

ふたつの証明法を紹介する。ひとつは

Klein の不等式の証明 から始める。この不等式の古くから知られている初等的証明法は，次のようである。

ρ の固有値と固有ベクトルを ρ_i，ξ_i とし，σ のそれを σ_j，η_j とする。$(\xi_i, \eta_j) = u_{ij}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
((\rho\log\rho - \rho\log\sigma)\xi_i, \xi_i) &= \rho_i\log\rho_i - \rho_i\sum_j |u_{ij}|^2\log\sigma_j \\
&\geqq \rho_i\log\rho_i - \rho_i\log\sum_j |u_{ij}|^2\sigma_j = -\rho_i\log\Big[\sum_j |u_{ij}|^2\sigma_j/\rho_i\Big] \\
&\geqq -\rho_i\Big(\Big[\sum_j |u_{ij}|^2\sigma_j/\rho_i\Big]-1\Big) = \rho_i - \sum_j |u_{ij}|^2\sigma_i \\
&= (\xi_i, (\rho-\sigma)\xi_i)
\end{aligned}
$$

により証明される。ここで最初の不等式は $\sum|u_{ij}|^2 = 1$ なので $x \mapsto -\log x$ が凸関数であることを使ったもので，第2の不等式は $\log(1+y) \leqq y$ が $y \geqq 0$ で成立することを使った。$\rho_i \neq 0$ の i を考えれば十分であり，$\rho_i \neq 0$，$u_{ij} \neq 0$，$\sigma_j = 0$ のようなものがあれば，左辺が $+\infty$ になって不等式は成立する。従って $\log\rho_i \neq -\infty$，$\log\sigma_j \neq -\infty$ の場合の上記証明で OK である。以上により，トレース類に属する正値作用素 ρ, σ について，Klein の不等式が証明されたことになる。

注意　$\mathrm{Tr}\,\rho = \mathrm{Tr}\,\sigma = 1$ の場合，Klein の不等式は

$$S(\sigma, \rho) \equiv \mathrm{Tr}(\rho\log\rho - \rho\log\sigma) \geqq 0$$

となる。これは相対エントロピーの正値性として知られてい

る。逆にこの正値性がわかると、一般の ρ, σ に対しては

$$\rho' = \rho / \mathrm{Tr}\,\rho, \quad \sigma' = \sigma / \mathrm{Tr}\,\sigma$$

に正値性を適用することにより

$$0 \leqq (\mathrm{Tr}\,\rho)\, S(\sigma', \rho') = \mathrm{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) + (\mathrm{Tr}\,\rho) \log \frac{\mathrm{Tr}\,\sigma}{\mathrm{Tr}\,\rho}$$

を得る。第2項に $\log(1+y) \leqq y$ $(y \geqq 0)$ を適用すると Klein の不等式が得られる。

<u>Peierls-Bogoliubov の不等式の証明</u> — 第1法

Klein の不等式において

$$\rho = e^{A} / \mathrm{Tr}\, e^{A}, \quad \sigma = e^{A+B} / \mathrm{Tr}\, e^{A+B}$$

とおくと，$\mathrm{Tr}\,\rho = \mathrm{Tr}\,\sigma = 1$ なので

$$\mathrm{Tr}\,\rho\left(\log\left[\mathrm{Tr}\, e^{A+B} / \mathrm{Tr}\, e^{A}\right]\right) - B\big) \geqq 0$$

を得る。これを書きなおすと，求める不等式になる。

<u>注意</u> Peierls-Bogoliubov の不等式から逆に Klein の不等式を次のように導くことができる。

$$A = \log \rho, \quad B = \log \sigma - \log \rho$$

とおくと，Peierls-Bogoliubov の不等式により

$$\mathrm{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) = -\mathrm{Tr}\, e^{A} B$$

$$\geqq -(\mathrm{Tr}\, e^{A}) \log(\mathrm{Tr}\, e^{A+B} / \mathrm{Tr}\, e^{A}) = -\mathrm{tr}\,\rho \log(\mathrm{Tr}\,\sigma / \mathrm{Tr}\,\rho)$$

$$\geqq -(\mathrm{Tr}\,\rho)\left([\mathrm{Tr}\,\sigma / \mathrm{Tr}\,\rho] - 1\right) = \mathrm{Tr}\,\rho - \mathrm{Tr}\,\sigma$$

ここで第2の不等式は $\log(1+y) \leqq y$ $(y \geqq 0)$ による。

第2の証明法は

$A \to \log \operatorname{Tr} e^A$ の凸性の証明 から始める。

いま$H=A-B$ とおき,

$$f(\lambda) \equiv \log \operatorname{Tr} e^{(1-\lambda)A+\lambda B} = \log \operatorname{Tr} e^{A+\lambda H}$$

が$f''(\lambda) \geqq 0$をみたすことを示せば, $f(\lambda)$は凸関数で

$$f(\lambda) \leqq \lambda f(0) + (1-\lambda) f(1)$$

が成立し, 求める凸性が得られる。$\underline{f}(\mu) = f(\lambda+\mu)$とおくと, $\underline{f}''(0) \geqq 0$ を示せばよいが, $A+\lambda H$ をAとみなせば, $f''(0) \geqq 0$ を示せばよいことになる。 fの微分を計算するため

$$F(s) = e^{s(X+Y)} e^{-sY}$$

とおくと,

$$F'(s) = F(s) Y(s), \qquad Y(s) \equiv e^{sX} Y e^{-sX}$$

を得るので

$$F(t) = F(0) + \int_0^t F(s) Y(s) ds = 1 + \int_0^t e^{s(X+Y)} Y e^{-sX} ds$$

となる。$t=1$ とおいて, YにμYを代入すると

$$e^{X+\mu Y} = 1 + \mu \int_0^1 e^{s(X+\mu Y)} Y e^{(1-s)X} ds .$$

この公式を用いて$\mu=0$における微分をもとめると

$$(d/d\mu) e^{X+\mu Y} \Big|_{\mu=0} = \int_0^1 e^{sX} Y e^{(1-s)X} ds .$$

$X=A+\lambda H$, $Y=H$ とおくことにより

$$(d/d\lambda) e^{X+\lambda H} = \int_0^1 e^{s(A+\lambda H)} H e^{(1-s)(A+\lambda H)} ds .$$

そこで fの微分が次のように求まる。

$$f'(\lambda) = \operatorname{Tr} (d/d\lambda) e^{A+\lambda H} / \operatorname{Tr} e^{A+\lambda H}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{Tr}\, e^{s(A+\lambda H)} H e^{(1-s)(A+\lambda H)} ds \Big/ \mathrm{Tr}\, e^{A+\lambda H}$$

$$= \mathrm{Tr}\, e^{A+\lambda H} H \Big/ \mathrm{Tr}\, e^{A+\lambda H} \equiv \langle H \rangle_\lambda .$$

$$f''(\lambda) = \mathrm{Tr}\,(d/d\lambda)\, e^{A+\lambda H} H \Big/ \mathrm{Tr}\, e^{A+\lambda H} - (\langle H \rangle_\lambda)^2 .$$

$$f''(0) = \int_0^1 \mathrm{Tr}(e^{sA} H e^{(1-s)A} H)\, ds \Big/ \mathrm{Tr}\, e^A - (\langle H \rangle_0)^2$$

$$= \int_0^1 \mathrm{Tr}(e^{sA}(H - \langle H \rangle_0) e^{(1-s)A} (H - \langle H \rangle_0))\, ds \Big/ \mathrm{Tr}\, e^A$$

$$= \int_0^1 \mathrm{Tr}(e^{sA/2}(H - \langle H \rangle_0) e^{(1-s)A} (H - \langle H \rangle_0) e^{sA/2})\, ds \Big/ \mathrm{Tr}\, e^A$$

$$\geqq 0$$

以上の計算によりもとめる凸性が得られた。

Peierls-Bogoliubov の不等式の証明 —— 第2法

$f(\lambda)$ の凸性から

$$f(1) \geqq f(0) + f'(0)$$

が得られる。ここで

$$f'(0) = \mathrm{Tr}\, e^A H \big/ \mathrm{Tr}\, e^A$$

などを代入すると

$$\mathrm{Tr}\, e^A H / \mathrm{Tr}\, e^A \leqq \log\left[\mathrm{Tr}\, e^{A+H} / \mathrm{Tr}\, e^A\right]$$

が得られる。H を B と書き換え，両辺の指数をとるともとめる不等式になる。

§3 Golden-Thompson の不等式の証明

有限次行列 a, b に対する Golden の証明は次のとおりである。

補助定理　$a\geq 0$, $b\geq 0$ のとき，任意の自然数 p に対し

$$\mathrm{Tr}\left[(ab)^{2^{p}}\right] \leq \mathrm{Tr}\left[(a^2b^2)^{2^{p-1}}\right]$$

証明　は帰納法による。行列 A, B に対し内積を

$$\langle A,B\rangle \equiv \mathrm{Tr}(AB^{*})$$

により定義すると，Cauchy-Schwartz の不等式

$$|\langle A,B\rangle|^2 \leq \langle A,A\rangle\langle B,B\rangle$$

が成立する。これを用いると，$p=1$ について

$$\mathrm{Tr}(ab)^2 = \langle ab, ba\rangle \leq (\langle ab, ab\rangle\langle ba, ba\rangle)^{1/2} = \mathrm{Tr}(a^2b^2)。$$

次に $m\geqq 2$, $1\leqq p\leqq m-1$ について不等式が成立したと仮定して $p=m$ の場合を示す。$m\geqq n\geqq 0$ をみたす整数 n に対し

$$\alpha_n \equiv (ab)^{2^{m-n}}(ba)^{2^{m-n}} \quad (=\alpha_n^{*}\geqq 0)$$
$$\beta_n \equiv (ba)^{2^{m-n}}(ab)^{2^{m-n}} \quad (=\beta_n^{*}\geqq 0)$$

とおくと，

$$\mathrm{Tr}\,\alpha_n^{N} = \mathrm{Tr}\,\beta_n^{N}\ (n\text{ 任意}),\quad \mathrm{Tr}(\alpha_{n+1}\beta_{n+1})^{N} = \mathrm{Tr}\,\alpha_n^{N}\ (m>n)$$

が $N=0, 1, 2, \cdots$ について成立する。$m\geqq n$ として

$$\mathrm{Tr}\,\alpha_n^{2^{n-1}} = \mathrm{Tr}(\alpha_{n+1}\beta_{n+1})^{2^{n-1}} \leqq \mathrm{Tr}(\alpha_{n+1}^{2}\beta_{n+1}^{2})^{2^{n-2}}$$
$$\leqq \mathrm{Tr}(\alpha_{n+1}^{2^2}\beta_{n+1}^{2^2})^{2^{n-3}} \leqq \cdots \leqq \mathrm{Tr}(\alpha_{n+1}^{2^{n-1}}\beta_{n+1}^{2^{n-1}})$$
$$\leqq (\mathrm{Tr}\,\alpha_{n+1}^{2^n}\,\mathrm{Tr}\,\beta_{n+1}^{2^n})^{1/2} = \mathrm{Tr}(\alpha_{n+1})^{2^n}.$$

ここで，不等式は順に $p=n-1, n-2, \cdots, 1$ の帰納仮定を使ったもので，最後の不等式はCauchy-Schwartz の不等式による。

この不等式を逐次使用することにより

$$\mathrm{Tr}(ab)^{2^m} = \langle (ab)^{2^{m-1}}, (ba)^{2^{m-1}} \rangle$$
$$\leqq \left(\langle (ab)^{2^{m-1}}, (ab)^{2^{m-1}} \rangle \langle (ba)^{2^{m-1}}, (ba)^{2^{m-1}} \rangle \right)^{1/2}$$
$$= \mathrm{Tr}\,\alpha_1 = \mathrm{Tr}\,\alpha_1^{2^0} \leqq \mathrm{Tr}\,\alpha_2^{2^1} \leqq \mathrm{Tr}\,\alpha_3^{2^2} \leqq \cdots \leqq \mathrm{Tr}\,\alpha_m^{2^{m-1}}$$
$$= \mathrm{Tr}(ab^2a)^{2^{m-1}} = \mathrm{Tr}(a^2b^2)^{2^{m-1}}$$

ただし，最初の不等式はCauchy-Schwartzの不等式である。

かくして$p=m$の場合が示せたので，証明が完了した。

Golden-Thompsonの不等式の証明 — Goldenの方法

補助定理をくり返し使うと

$$\mathrm{Tr}(ab)^{2^p} \leqq \mathrm{Tr}(a^2b^2)^{2^{p-1}} \leqq \mathrm{Tr}(a^{2^2}b^{2^2})^{2^{p-2}} \leqq \cdots$$
$$\leqq \mathrm{Tr}(a^{2^p}b^{2^p})$$

を得る。(これはLieb-Thirringの不等式の$m=2^p$の場合。)

$$a = \exp(2^{-p}A), \quad b = \exp(2^{-p}B)$$

とおくと

$$\mathrm{Tr}(e^{2^{-p}A}e^{2^{-p}B})^{2^p} \leqq \mathrm{Tr}(e^Ae^B)$$

となる。ここで$p\to\infty$の極限をとり，Trotterの公式を使うとGolden-Thompsonの不等式を得る。

次にThompsonの証明法を説明する。

Polyaの不等式　a_i, b_i $(i=1,\cdots,m)$は実数で

$$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_m, \quad b_1+\cdots+b_q \leqq a_1+\cdots+a_q \quad (1\leqq q\leqq m)$$

をみたすものとする。このとき単調増大凸関数ωに対し

$$\omega(b_1)+\cdots+\omega(b_m) \leqq \omega(a_1)+\cdots+\omega(a_m)$$

証明は[8]を参照。

<u>Weylの不等式</u>　n行n列の行列Aについて，

$$\det(zE-A)=0$$

の根を絶対値の大きい方から並べたものを$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$とする。$\lambda_i=|\alpha_i|^2$とおくと，$\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_n$である。また

$$\det(zE-A^*A)=0$$

の根を大きい方から並べたものを$\kappa_1\geqq\kappa_2\geqq\cdots\geqq\kappa_n$とする。$[0,\infty)$で定義された単調増大関数$\varphi$で，$\xi\to\varphi(e^\xi)$が凸関数であるものに対して，

$$\varphi(\lambda_1)+\cdots+\varphi(\lambda_m)\leqq\varphi(\kappa_1)+\cdots+\varphi(\kappa_m)\quad(1\leqq m\leqq n)$$

<u>証明</u>　$A\xi=\alpha_1\xi,\ \xi\neq0$とすれば，

$$|\alpha_1|^2\|\xi\|^2=\|A\xi\|^2\leqq\|A^*A\|\,\|\xi\|^2=\kappa_1\|\xi\|^2$$

より$\lambda_1\leqq\kappa_1$を得る。同じことを完全<u>反対称</u>k重テンソル積の空間で$A^{\otimes k}$を考えると，

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\leqq\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_m$$

が得られる。Polyaの不等式で$b_i=\log\lambda_i$，$a_i=\log\kappa_i$，$\omega(b)=\varphi(e^b)$とおけばWeylの不等式を得る。$\kappa_j=0\ (j\geqq l)$となれば上の不等式から$\lambda_j=0\,(j\geqq l)$となり，$\lambda_j=0$ならばκの如何によらず$\varphi(\lambda_l)=\varphi(0)\leqq\varphi(\kappa_l)\ (l\geqq j)$となるので，$\lambda_m\neq0$，$\kappa_m\neq0$の$m$についてPolyaの不等式を使えば十分である。

Weylの証明[9]も参照。

系　$|\mathrm{Tr}(A^{2m})| \leqq \mathrm{Tr}[(A^*A)^m] = \mathrm{Tr}[(AA^*)^m]$

証明　$|\mathrm{Tr}(A^{2m})| = |\sum \alpha_i{}^{2m}| \leqq \sum \lambda_i{}^m \leqq \sum \kappa_i{}^m = \mathrm{Tr}(A^*A)^m$

ここで2番目の不等式はWeylの不等式で$\varphi(x)=x^m$としたものである。

Golden-Thompsonの不等式の証明 — Thompsonの方法

上記系で$A=ab$とおくと$X^*X=ba^2b$なので

$$\mathrm{Tr}(ab)^{2^m} \leqq \mathrm{Tr}(ba^2b)^{2^{m-1}} = \mathrm{Tr}(a^2b^2)^{2^{m-1}}$$

を得る。このあとはGoldenの証明と同じである。

Liebの凹性を使うと第3の証明法ができる。[10]

Golden-Thompsonの不等式の証明 — Lieb凹性の応用

正線形汎関数

$$\psi(X) = \mathrm{Tr}(e^A X)$$

について，摂動を受けた汎関数ψ^Bを

$$\psi^B(X) = \mathrm{Tr}(e^{A+B}X)$$

で定義する。Liebの凹性は$\rho = e^B\ (>0)$について，

$$\rho \to \psi^B(1) \equiv f(\rho)$$

が凹であることを云う。そこで

$$g(\lambda) = f((1-\lambda)+\lambda\rho)$$

はλの凹関数である。ここで

$$g(0) = \psi(1),\quad g(1) = \psi^B(1) = \mathrm{Tr}\,e^{A+B},$$

また

$$B=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{\rho+t}\right)dt$$

により，$\rho(\lambda)=\lambda(\rho-1)$ に対し

$$(d/d\lambda)\log(1+\rho(\lambda))=\int_0^\infty(1+\rho(\lambda)+t)^{-2}\rho'(\lambda)\,dt$$
$$=(1+\rho(\lambda))^{-1}(\rho-1).$$

したがって

$$g'(0)=\mathrm{Tr}\,e^A(\rho-1)=\psi(\rho-1).$$

g が凹関数なので

$$\mathrm{Tr}\,e^{A+B}=g(1)\leqq g(0)+g'(0)=\psi(\rho)=\mathrm{Tr}\,e^Ae^B$$

ゆえに Golden-Thompson の不等式を得る。

Liebの凹性の証明は[17]参照。次の結果[11]による別証もある。

<u>Epsteinの凹性</u>　単位元 1 をもつ C^*環$\mathfrak{A}$において，領域

$$D\equiv\bigcup_{\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\ \bigcup_{0<\varepsilon\in\mathbb{R}}\{A\in\mathfrak{A}\,;\ \mathrm{Re}\,e^{-i\theta}A\geqq\varepsilon\}$$

で定義された複素数値関数 f が

(i)　D上正則：SpAのまわりの正方向のループ γ に対し

$$f(A)=(2\pi i)\int_\gamma f(z)(z-A)^{-1}dz.$$

(ii)　$\mathrm{Im}\,A>0$　ならば　$\mathrm{Im}\,f(A)\geqq0$,

$\mathrm{Im}\,A<0$　ならば　$\mathrm{Im}\,f(A)\leqq0$.

(iii)　任意の $\rho>0$, $A\in D$ に対し　$f(\rho A)=\rho^sf(A)$　となる ρ, A によらない $0<s\leqq1$ となる s がある。

の3條件をみたすとき，f は $\{A\in\mathfrak{A} : A=A^*>0\}$ で凹であり，任意の $A_1=A_1^*$，$A_2=A_2^*>0$ に対し，十分小さな実数 t で

$$(d^{2n}/dt^{2n})f(A_2+tA_1)\leqq 0$$

である。

ここで $A>0$ はある $\varepsilon>0$ に対し $A>\varepsilon\mathbb{1}$ を意味し，

$$\mathrm{Re}\ C=(C+C^*)/2,\quad \mathrm{Im}\ C=(C-C^*)/(2i)$$

である。

§4 関連する話題

Epstein の凹性の応用として

$$C\geqq 0\longrightarrow g(C)\equiv \mathrm{Tr}(BC^{1/m}B)^m\qquad (B=B^*)$$

の凹性がでる。これを使うとLieb-Thirring の不等式が証明できる。[5]

Lieb-Thirring の不等式は次のように一般化できる。[12]

Lieb-Thirring の不等式の一般化 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$p\geqq q\geqq 1$

$$\mathrm{Tr}(b^{1/2}ab^{1/2})^p\leqq \mathrm{Tr}(b^{q/2}a^q b^{q/2})^{p/q}$$

この不等式で p を自然数とし，$q=2$ とおくと Thompson の証明にでてくる不等式（＊）になる。また同じく $q=p$ とおくと Lieb-Thirring の不等式になる。

この不等式はWeyl の不等式の証明の技法を使うと次の不等式から導くことができる。

<u>Heinzの不等式</u>　$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ q \geqq 1$　のとき

$$\|ab\|^q \leqq \|a^q b^q\|$$

上記のLieb-Thirringの不等式の一般化は，研究会の段階ではこのHeinzの不等式と同等なことがわかったので予想として述べたが，吉田氏にHeinzの不等式の文献を教えて頂いたものである。(Heinzの不等式[13]については[14]，その中の文献，及び吉田の論文[15]等を参照)。

先に述べた$\log \mathrm{Tr}\ e^A$の凸性は，Federbush等による次の結果からも導かれる。[16]

<u>FTY凸性</u>　行列$A=A^*$の固有値をλ_i, $i=1,\cdots,n$とし，fは$\mathbb{R}^n$から$\mathbb{R}$への対称関数とする。fに対応するAの関数Fを

$$F(A)=f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

と定義すれば，$F(A)$の凸性とfの凸性は同値である。

この結果の応用として次の関数の凸性あるいは凹性がでる。

gが凸のとき，$A\to \mathrm{Tr}(g(A))$の凸性

$A\to \log \mathrm{Tr}\ e^A$の凸性

$A\to (\mathrm{Det}\ A)^{1/n}$の凹性　($A$は$n$行$n$列の行列)

§5　一般のvon Neumann環の枠組への書き換え.

MがI型因子の場合，Mの正規正線形汎関数φに対し，次式をみたすMの正元ρが一意に対応する。

$$\varphi(A) = tr_M(\rho A) \qquad (A \in M)$$

ただし，tr_M は M 上の半有限正規トレースである。ρ は φ の密度行列とよばれる。逆に M の正元 ρ で $tr_M \rho < \infty$ となるものは，上式により M の正規正線形汎関数 φ を与える。そこで ρ に対する不等式を φ に対する不等式と解釈して，一般の von Neumann 環に拡張する。簡単のため，ρ が固有値 0 を持たない場合，すなわち φ が忠実な場合に限定して話を進めるが，φ が忠実でない場合も適当な修正をして話を進めることができる。

忠実な φ から GNS 構成法により M の表現 π_φ と，φ の表現ベクトル ξ_φ を構成し，そのモジュラー作用素を Δ とする。M の任意のエルミート元 $h = h^*$ に対し，

$$\xi_\varphi^h \equiv e^{(h + \log \Delta)/2}\, \xi_\varphi$$

が存在し（すなわち ξ_φ がその前の作用素の定義域に入り），

$$\varphi^h(A) = (\pi_\varphi(A)\xi_\varphi^h, \xi_\varphi^h) \qquad A \in M$$

により定義される M の正規正線形汎関数を，h による摂動状態とよぶ。M が I 型因子で φ の密度行列が

$$\rho = e^A$$

のとき，φ^h の密度行列は

$$\rho^h = e^{A+h}$$

である。量子統計力学では，ハミルトニアン H の系の平衡状

態は$\rho = e^{-\beta H}$が密度行列に比例する。冨田竹崎理論では，逆温度を表わす実数は$\beta=-1$におくので，$\rho = e^{A}$のAがハミルトニアンの意味をもつ。ハミルトニアンをAからA+hに変更することを通常摂動と呼ぶので，上記の用語を使う。

このような記法を使うと，

$$\varphi(e^{h}) \geq \varphi^{h}(1) \geq \varphi(1)\, e^{\varphi^{h}(1)/\varphi(1)}$$

がGolden-Thompsonの不等式（前の不等式）とGolden-Thompsonの不等式（後の不等式）を表わす。実際，一般のMで証明されている。[15]

凸性についても

$$h \to \log \varphi^{h}(1) \quad \text{が凸}$$

$$\rho \to \varphi^{\log \rho} \quad \text{が凹}$$

が証明できる。後者はLiebの不等式の一般化である。

同様にして，相対モジュラー作用素を使って相対エントロピーを定義し，その性質を一般のMで証明することができる。

前節で述べたLieb-Thirringの不等式の一般化についても，FackはWeylの方法を一般化するため特性値の概念を導入して$q=2^{k}$の場合を一般のvon Neumann環上のトレースについて証明している。[18]　Fackの特性値の理論は，一般化されたs-数の理論としてFack-幸崎により整備され（[19]），Lieb-Thompsonの不等式の一般化も任意のq（$p \geq q \geq 1$）で証明され

ている。［寺崎からの私信］

文献

[1] R. Peierls, Proc. Camb. Phil. Soc. 32 (1936), 477–481.

[2] N.N. Bogoliubov, Phys. Abh. SU. 1 (1962), 1– ; 113– ; 229– .

[3] S. Golden, Phys. Rev. 137 (1965), B1127–B1128.

[4] C. J. Thompson, J. Math. Phys. 6 (1965), 1812–1813.

[5] E. Lieb, W. Thirring, Studies in Mathematical Physics (Lieb, Simon, Wightman 共編, Princeton Press, 1976年), 301–302.

[6] E. H. Lieb & M. B. Ruskai, J. Math. Phys. 14 (1973), 1938–1941.

[7] E. Lieb, Adv. Math. 11 (1973), 267–288.

[8] G. Polya, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 36 (1950), 49– .

[9] H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 35 (1949), 408–411.

[10] H. Araki, Introduction to Relative Hamiltonian and Relative Entropy, Lecture Notes in Marseille 1975, preprint 75/P. 782. (Proof of Theorem 6.3).

[11] H. Epstein, Commun. Math. Phys. 31 (1973), 317–325.

[12] H. Araki, On an inequality of Lieb and Thirring, Lett. Math. Phys. in press.

[13] E. Heinz, Math. Ann. 123 (1951), 415-438.

[14] H. O. Cordes, Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras, London Math. Soc. Lecture Notes Series 76, Cambridge Press, 1987. p. 24.

[15] T. Furuta, Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem, Rev. Math. Phys. in press.

[16] P. Federbush, B.A. Taylor & W.H. Yang, A convexity theorem for hermitien matrices.

[17] H. Araki, Comm. Math. Phys. 34 (1973), 167-178.

[18] T. Fack, J. Operator Theory 7 (1982), 307-333.

[19] T. Fack and H. Kosaki, Pacific J. Math. 123 (1986), 269-300.